Théorie des ensembles, dénombrement

Exercice 1. ⋆ Calculer $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$ (faire le suivant si c'est trop facile).

Exercice 2. ⋆ Soient E un ensemble non vide et $x \in E$. Montrer que E est infini si et seulement s'il existe une bijection $E \xrightarrow{\sim} E\backslash\{x\}$.

Rappel. Un ensemble est *dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec $\mathbf{N}$.

Exercice 3. ⋆⋆ Montrer qu'un ensemble X est dénombrable si et seulement s'il existe une injection $X \to \mathbf{N}$, ce qui équivaut aussi à l'existence d'une surjection $\mathbf{N} \to X$.

Exercice 4. ⋆ Montrer que $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$ (l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang) est dénombrable.

Exercice 5. ⋆ L'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$ est dénombrable.

Exercice 6. ⋆⋆ Montrer que $\mathsf{Card}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) = \mathsf{Card}(\mathbf{R})$.

Remarque. Prolongement possible de l'exercice : $\mathsf{Card}(\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})) = \mathsf{Card}(\mathbf{R}) < \mathsf{Card}(\mathscr{P}(\mathbf{R})) = \mathsf{Card}(\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}))$ (plus difficile).

Exercice 7. ⋆⋆⋆ (Cantor-Berstein).

(1) Soient E un ensemble et $\varphi\colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ une application croissante (pour l'inclusion). Montrer que φ admet un point fixe.

(2) Soient E et F deux ensembles, et $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ deux applications injectives. En considérant l'application $\mathscr{P}(E) \ni A \mapsto E\backslash\big(g(F\backslash f(A))\big) \in \mathscr{P}(E)$, montrer qu'il existe une bijection de E dans F.

Exercice 8. ⋆ Montrer que $\binom{a+b}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Exercice 9. ⋆ Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 10. ⋆⋆ Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{\lfloor n/3\rfloor}$. Généraliser.

Exercice 11. ⋆ Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer le nombre de couples $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$, puis tels que $X \cup Y = E$.

Exercice 12. ⋆⋆ Soit E un ensemble de cardinal n. Calculer $\sum\limits_{X,Y\subset E} \#(X \cap Y)$ et $\sum\limits_{X,Y\subset E} \#(X \cup Y)$.

Exercice 13. ⋆ Une formule d'inversion bien utile. Soient $(G,+)$ un groupe abélien (noté additivement) et $f\colon \mathbf{N} \to G$ une application. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $g(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} g(k)$.

Remarque. Prolongement possible de l'exercice : la formule d'inversion de Möbius (très importante en arthmétique). Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré > 1. Sinon, on peut écrire $n = p_1 \cdots p_r$ où $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts : on pose alors $\mu(n) = (-1)^r$. Soient $(G,+)$ un groupe abélien (noté additivement) et $f\colon \mathbf{N}_{>0} \to G$ une application. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $f(n) = \sum\limits_{d|n} \mu\big(\frac{n}{d}\big) g(d)$.

Exercice 14. $\star$ Si $n \in \mathbf{N}$, soit s_n le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k = n!$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n!}$.

Exercice 15. $\star\star$ Calculer :

(0) le nombre de fonctions $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$;
(1) le nombre de fonctions strictement croissantes $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$;
(2) le nombre de fonctions croissantes $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$;
(3) le nombre de fonctions injectives $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$;
(4) le nombre de fonctions surjectives $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$ [indication : utiliser la formule d'inversion de l'exercice précédent].

Exercice 16. $\star$ Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (nombres de Fibonacci). Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n T^n = \frac{1}{1-T-T^2}$.

Exercice 17. $\star$ Calculer la somme des éléments de $\{xyz\,;\,(x,y,z) \in \mathbf{N}^3,\ x+y+z=n\}$ [indication : poser $F(T) = \sum_{n=1}^{\infty} nT^n \in \mathbf{Q}[\![T]\!]$ et étudier $F(T)^3$].

Exercice 18. $\star$ Montrer que la dimension sur K de l'espace des polynômes homogènes de degré n dans $K[X_1,\ldots,X_r]$ est $\binom{n+r-1}{n}$ [indication : poser $G(T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathbf{Q}[\![T]\!]$ et étudier ses dérivées successives].